Calcolo del determinante

Data una matrice A con dimensione $n \cdot n$

Se $n = 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det A = ad - bc$$

$-$ $+$

Se $n = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

$-$ $-$ $-$ $+$ $+$ $+$

1) Ricopi le prime 2 colonne
2) tracci le diagonali
3) le diagonali principali sono $+$ e le diagonali secondarie sono $-$

esempio diagonale 1: $+a_{11}a_{22}a_{33}$

Se $n \geq 3$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdot a_{ij} \cdot & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Scelgo le riga o colonne con più 0

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

Complemento algebrico

Cambia di segno se $i+j$ è dispari

ovvero il det della sottomatrice ottenuta eliminando le i-esime riga e le prime colonne

Esempio $n \geq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(+1-2) + 1(1+3) = 2+4 = 6$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

cambia di segno perché di indice dispari

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \left(-1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) + 1 \cdot \left(-1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 2 \cdot (-1 \cdot (-3-2)) + 1(-1(-3-2)) = (2 \cdot 5) + (1 \cdot 5) = 15$$

Proprietà del determinante

1) Se una matrice ha una riga/colonna nulla allora $\det = 0$

2) Se 2 righe/colonne parallele sono proporzionali allora $\det = 0$

3) Se una matrice ha una riga/colonna che è combinazione lineare allora $\det = 0$

4) Se il determinante $\neq 0$ allora il rango della matrice è massimo ovvero n

Vettori linearmente indipendenti

$v_1 = (1,0,-1,0) \quad v_2 = (0,1,0,-2) \quad v_3 = (1,0,0,-1) \quad v_4 = (0,0,1,-1)$

1) Con definizione

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = (0,0,0,0)$$

$$a_1(1,0,-1,0) + a_2(0,1,0,-2) + a_3(1,0,0,-1) + a_4(0,0,1,-1) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} 1a_1 + 0a_2 + 1a_3 + 0a_4 = 0 \\ 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 + 0a_4 = 0 \\ -1a_1 + 0a_2 + 0a_3 + 0a_4 = 0 \\ 0a_1 + -2a_2 + 1a_3 + -1a_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = -a_1 \\ a_2 = 0 \\ a_4 = a_1 \\ a_3 - a_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_4 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

Se risolvendo questo sistema le soluzioni sono di questo tipo allora i vettori sono l.i.

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

2) Metodo veloce

Scrivo i vettori formando una matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice ci dice quanti vettori sono l.i. tra quelli dati

Matrice inversa

A una matrice $n \cdot n$ con $\det A \neq 0$ esiste una sola matrice inversa ovvero A^{-1} e quindi che $A \cdot A^{-1} =$ Identità

Come determinare A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det A = -1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = \boxed{1}$$

$\neq 0$ quindi è invertibile

lo spiego in calcolo determinante con $n \geq 3$

Calcolo i complementi algebrici di ogni entrata

$A_{11} = -1$ $\quad A_{21} = -2$ $\quad A_{31} = 0$

$A_{12} = -2$ $\quad A_{22} = -1$ $\quad A_{32} = +1$

$A_{13} = -1$ $\quad A_{23} = -1$ $\quad A_{33} = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A^{(a)}$$

matrice aggiunta di A

Prendere ogni elemento $\in A^{(a)}$ e dividerlo per il det così trovo l'inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Risolvere il sistema vuol dire trovare una ennupla che soddisfa tutte le equazioni. Ci sono soluzioni? Quante sono?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad C = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matrice incompleta dei coefficienti — matrice completa

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + z = 0 \\ x - y = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Un sistema ammette soluzione se e solo se: $rk(A) = rk(C)$

Numero di componenti — rango

- Se $n = r$ sistema determinato
- Se $n > r$ sistema indeterminato con $n - r$ incognite

1) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $rk(A) = 2$, $rk(C) = 2$, $rk(A) = rk(C)$

sistema determinato perché $r = n$

2) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $rk(A) = 1$, $rk(C) = 2$, $rk(A) \neq r(C)$

sistema impossibile

3) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $rk(A) = 1$, $rk(C) = 1$, $rk(A) = rk(C)$

sistema indeterminato perché $n > r$ con 1 componente libera

Esercizi $n = 4$

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x - y + t = 0 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & +1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{G-J}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n > r$ quindi abbiamo $n - r$ incognite libere $n - r = 4 - 2 = 2$

$$\rightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$$

scelgo y e t come incognite libere

$$\begin{cases} x = y - t \\ y = y \\ z = 1 + y + T + x \\ t = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y - t \\ y = y \\ z = 1 + 2t \\ t = t \end{cases}$$

$$(y - t, y, 1 + 2t, t)$$

soluzione

$n = 2$

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad rk(A) = 1 \quad rk(C) = 1$$

$n > r$ quindi è indeterminato con 1 variabile libera

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases} \rightsquigarrow x - 2y = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x = 2 + 2y \\ y = y \end{cases}$$

$$(2 + 2y, y)$$

soluzione

Come trovare una base di uno spazio vettoriale

R^3 $\quad \dim R^{3} = 3$

$e_1 = (1,0,0)$

$e_2 = (0,1,0)$

$e_3 = (0,0,1)$

spazio vettoriale ovvero un'insieme fatto da vettori di 3 elementi

$\mathcal{E}_{R^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ Base canonica di R^3

Come trovare una base non canonica

$v_1 = (1,-1,2)$ → vettore casuale

$v_2 = (0,2,5)$ → vettore casuale con 0 in prima pos

$v_3 = (0,0,1)$ → vettore " " " " " e secondo 0 in terza posizione

$A = \{(1,-1,2),(0,2,5),(0,0,1)\}$ Base di R^3

Come trovare una base di un sottospazio vettoriale

$$V = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x - y - 2z = 0\}$$

sottospazio di R^3 ovvero tutti i vettori di 3 elementi che rispettano questa condizione

dim V = dim R^3 − numero di equazioni

dim V = 3 − 1 = 2 → la base è fatta da 2 vettori e quindi 2 incognite libere

Scelgo z e y

$$\begin{cases} x = y + 2z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1y + 2z \\ y = 1y + 0z \\ z = +0y + 1z \end{cases}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

→ Base di V

Dato un sottospazio e la sua base calcola le equazioni cartesiane

$V \subset R^3$ $\qquad B = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$

Quante equazioni?

$\dim R^3 - \dim B$ quindi $3-2=1$

x, y, z sono in relazione tra di loro attraverso una 'sola' equazione cartesiana

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_i \\ \end{array}$$
v_i → generico vettore di V

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ -1 & 2 & z \end{pmatrix}$$

- calcolo il det
- e lo pongo $= 0$

$$\det A = -1 \begin{vmatrix} 1 & y \\ -1 & z \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1(z+y) + x = -z - y + x$$

$\boxed{-z - y + x = 0}$ → eq che stavamo cercando

↓

possiamo verificare che sia vera sostituendo i vettori della base al suo interno

$v = (5, 1, 2) \in V$? $\quad -2 - 1 + 5 \neq 0$ non appartiene

$v_h = (h+1, 2, -h) \in V$? $\quad +h - 2 + h + 1 = 0$

$\cancel{2}h = \frac{1}{\cancel{2}}$ $\qquad$ per $h = \frac{1}{2}$ il vettore appartiene a V

$W \in R^3$ $\qquad B_w = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$n° eq = 3 - 1 = 2$

$$\begin{matrix} 1 & x \\ -1 & y \\ 1 & z \end{matrix}$$

- Calcolo il determinante di queste sottomatrici
- lo pongo $= 0$
- quelle che trovo sono le eq cartesiane che legano le componenti tra loro

Somme (dirette) di 2 S.V.

V e W 2 sottospazi

Diremo che U è **somma** di V e W se:

$\forall u \in U \quad u = v + w \qquad v \in V$ e $w \in W$

Preso un qualsiasi u in U questo può essere scritto come somma di 2 vettori $v \in V$ e $w \in W$

La somma si dice **diretta** se la condizione di prima viene resa vera solo da un solo $v \in V$ e $w \in W$ ovvero se $\dim(V \cap W) = 0$

Esempio:

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 0\}$

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

$\mathbb{R}^3 = V \oplus W$?

Bisogna verificare $\dim(V \cap W) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} rk(A) = 3 \\ rk(C) = 3 \end{matrix}$$

$n = r$ quindi una sola soluzione ovvero $(0, 0, 0)$ $\downarrow$ il vettore nullo non vale

$\dim(V \cap W) = 0$

Applicazione lineare

$f: V \to W$ si dice lineare se:

1) $v_1, v_2 \in V \to f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2) $v_1, v_2 \in V \quad \lambda \in R \to f(\lambda v) = \lambda f(v)$

$\boxed{f: R^3 \to R^3} \to$ endomorfismo ovvero un'applicazione lineare che va in se stessa

Esempio

Dato $f: R^3 \to R^3$ che usa questa legge per mappare dal dominio al codominio $f(x, y, z) = (x+y, x, x-z)$

di se f è un'applicazione lineare

$v_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad v_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Verifica prima condizione

$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$f(v_1 + v_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 - z_1 - z_2)$

$f(v_1) = (x_1 + y_1, x_1, x_1 - z_1)$

$f(v_2) = (x_2 + y_2, x_2, x_2 - z_2)$

$(x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 - z_1 - z_2) = (x_1 + y_1, x_1, x_1 - z_1) + (x_2 + y_2, x_2, x_2 - z_2)$

$(x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 - z_1 - z_2) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 - z_1 - z_2)$

Prima condizione vera

Verifica seconda condizione

$\lambda v_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \qquad f(v) = (x_1 + y_1, x_1, x_1 - z_1)$

$f(\lambda v_1) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_1, \lambda x_1 - \lambda z_1)$

$\lambda f(v) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_1, \lambda x_1 - \lambda z_1)$

Seconda condizione vera

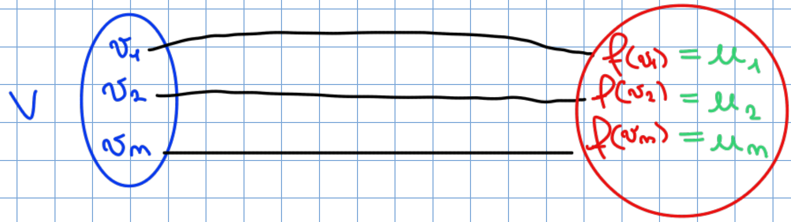
l'applicazione data è lineare

Matrice associata ad un'applicazione lineare

$f: V \to W$ $\qquad M^{\mathcal{R}}_{\mathcal{B}}(f)$ $\qquad \mathcal{R} \to$ base di partenza, $\mathcal{B} \to$ base di destinazione

$\mathcal{R}$ = base di $V = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$

W = base di $W = \{w_1, w_2, w_m\}$



$$u_1 = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m$$

componenti di u_1 rispetto alla base di destinazione

$$u_2 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m$$

$$u_n = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_m w_m$$

$$M^{\mathcal{R}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_m & b_m & c_m \end{pmatrix}$$

Immagini e matrice

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad f(1,1,1) = (2,0,1)_{v_1} \quad f(0,1,1) = (1,0,1)_{v_2} \quad f(-1,0,1) = (2,1,1)_{v_3}$

Devo trovare $f(e_1)$, $f(e_2)$ e $f(e_3)$ lo faccio risolvendo questo sistema

$$\begin{cases} 1 f(e_1) + 1 f(e_2) + 1 f(e_3) = v_1 \\ 0 f(e_1) + 1 f(e_2) + 1 f(e_3) = v_2 \\ -1 f(e_1) + 0 f(e_2) + 1 f(e_3) = v_3 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & 1 & v_2 \\ -1 & 0 & 1 & v_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Riduco con Gauss-Jordan $\rightsquigarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v_1 - v_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2v_2 - v_1 - v_3 \\ 0 & 0 & 1 & v_1 - v_2 + v_3 \end{array}\right)$$

$f(0,0,1) = v_1 - v_2 + v_3 \to f(0,0,1) = (3,1,1)$

$f(0,1,0) = 2v_2 - v_1 - v_3 \to f(0,1,0) = (-2,-1,0)$

$f(1,0,0) = v_1 - v_2 \to f(1,0,0) = (1,0,0)$

$$M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice → legge

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (x - 2y + 3z, -y + z, z)$$

Matrice associata usando le basi canoniche

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z) \to (2x+y,\ y-z)$

$E_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$E_2 = \{(1,0),(0,1)\}$

$f(1,0,0) = (2,0) \quad f(0,1,0) = (1,1) \quad f(0,0,1) = (0,-1)$

$(2,0) = a_1(1,0) + a_2(0,1) \to \begin{cases} 1a_1 + 0a_1 = 2 \\ 0a_2 + 0a_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a_1 = \boxed{2} \\ a_2 = \boxed{0} \end{cases}$

$(1,1) = b_1(1,0) + b_2(0,1) \to \begin{cases} b_1 = \boxed{1} \\ b_2 = \boxed{1} \end{cases}$

$(0,-1) = c_1(1,0) + c_2(0,1) \to \begin{cases} c_1 = \boxed{0} \\ c_2 = \boxed{-1} \end{cases}$

andrebbero risolti così

$M_{E_2}^{E_3}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ← Prendo i risultati trovati (evidenziati in rosso) e li metto in colonne

Matrice associata usando basi SPASTICHE

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x,y,z) \to (2x+y,\ y-z)$

$A = \{(1,-2,-2),(0,1,1),(0,0,1)\}$ base di $\mathbb{R}_3$

$B = \{(1,1),(1,-1)\}$ base di $\mathbb{R}_2$

$f(1,-2,-2) = (0,0) \quad f(0,1,1) = (1,0) \quad f(0,0,1) = (0,-1)$

$(0,0) = a_1(1,1) + a_2(1,-1) \to \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a_2 + a_2 = 0 \\ a_1 = a_2 \end{cases} \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$

$(1,0) = b_1(1,1) + b_2(1,-1) \to \begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_1 - b_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \frac{\cancel{2}b_2}{\cancel{2}} = \frac{1}{2} \\ b_1 = b_2 \end{cases} \begin{cases} b_2 = \frac{1}{2} \\ b_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$(0,-1) = c_1(1,1) + c_2(1,-1) \to \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = -1 \end{cases} \to \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ +\frac{\cancel{2}c_2}{\cancel{2}} = +\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2} \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$M_B^A(f) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2×3

dim B

dim A

Autovalori e autovettori

Dato V e un'endomorfismo $f: V \to V$

$v \in V$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Diremo che v è un autovettore e λ un suo autovalore se:

$f(v) = \lambda v$

Esempio:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = (x, y+z, x+y+z)$

Determina autovalori e autovettori

$$\left.\begin{aligned} f(e_1) &= (1,0,1) \\ f(e_2) &= (0,1,1) \\ f(e_3) &= (0,1,1) \end{aligned}\right\} \to M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice identità

$$H = M - \lambda \cdot \mathrm{Idm}_3 \to \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Calcolo il det di H

$$\det H = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 \cancel{+1} - 2\lambda \cancel{-1})$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - \lambda^3 + 2\lambda^2 \to -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$$

Pongo il det = 0

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$\Delta = 9 - 4(+2) = 1$

$\lambda = \frac{+3 \pm 1}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

$$\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \to \underbrace{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0}_{\text{autovalori}}$$

Moltiplico H per la matrice delle incognite e lo pongo = 0

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (1-\lambda)y = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z \end{cases}$$

Per $\lambda_3 = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \to (0, -z, z) \to (0, -1, 1)$$

Per $\lambda_1 = 1$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ +z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases} \longrightarrow (-y, y, 0) \longrightarrow (-1, 1, 0)$$

Per $\lambda_2 = 2$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ \cancel{y = z} \end{cases} \longrightarrow (0, z, z) \longrightarrow (0, 1, 1)$$

Quelli evidenziati in rosso sono gli autovettori per verificare che sono giusti facciamo quanto segue:

$$\left.\begin{aligned} f(0,1,1) &= (0,0,0) \\ f(-1,1,0) &= (0,0,0) \\ f(0,-1,1) &= (0,0,0) \end{aligned}\right\} \text{se sono verificate ho fatto i calcoli bene}$$

N.B: Se il numero di autovalori è = alla dimensione del dominio alla l' applicazione si dice semplice

Autospazi

molteplicità algebrica

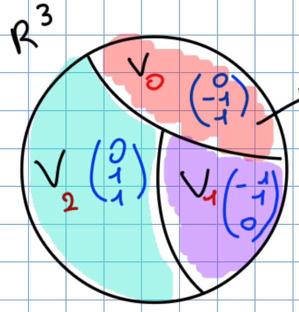
$$M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0 \quad m_a = 1 \rightarrow v_1 = (0, -1, 1)$

$\lambda_2 = 1 \quad m_a = 1 \rightarrow v_2 = (-1, 1, 0)$

$\lambda_3 = 2 \quad m_a = 1 \rightarrow v_3 = (0, 1, 1)$

Se la m_a è uguale ad n allora il numero di vettori associati a quel autovalore saranno n



gli autospazi sono i sottospazi generati dagli autovettori associati ad un autovalore

In questo caso tutti gli autospazi formano tutto R^3 quindi l'endomorfismo è semplice

molteplicità geometrica

V_0 sottospazio generato da $\{(0, -1, 1)\} \rightarrow m_g = 1$

V_2 sottospazio generato da $\{(0, 1, 1)\} \rightarrow m_g = 1$

V_1 sottospazio generato da $\{(-1, 1, 0)\} \rightarrow m_g = 1$

R^3 spazio generato da $\{(0, -1, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$

Quando $m_g = m_a$ allora gli autovettori generano tutto lo spazio

Esempio

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $\quad M = \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}$ $\quad H = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Sono 2 perche $\lambda^2 = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 (2-\lambda)^2 = 0 \quad \left.\begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \end{matrix}\right\} m_a = 2 \quad \left.\begin{matrix} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \end{matrix}\right\} m_a = 2$$

- Dobbiamo trovare la dimensione di V_0

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-0 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix} \to \dim V_0 = \overbrace{\underbrace{4}_{\text{numero incognite}} - \underbrace{2}_{\text{numero equazioni}}}^{\text{Rouché-Cap}} = 2 = m_g$$

avendo che $m_a = m_g$ allora

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \; x+y=0=z+t \right\} \to V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Dobbiamo trovare la dimensione di V_2

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \dim V_2 = 4-2 = 2 = m_g$$

avendo che $m_a = m_g$ allora

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \; -x+y=0=-z+t \right\} \to V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

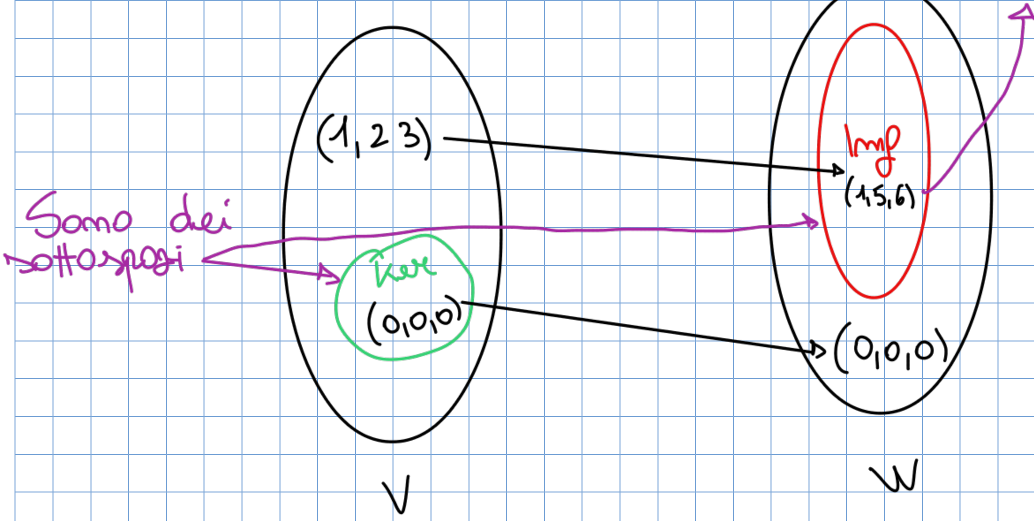
Visto che somma delle molteplicità geometrica è uguale alla dim $\mathbb{R}^4$ allora abbiamo un endomorfismo semplice

Che cose sono Ker e Imf

Dato $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = (x, y+z, x+y+z)$

$V \to W$

calcolato usando



Imf f sono tutti i vettori toccati da un vettore del Dominio

Ker f sono tutti i vettori del dominio che vanno nel vettore nullo del codominio ($\mathbb{R}^3 = (0,0,0)$)

Per poter trovare Ker e Imf di una funzione dobbiamo calcolare le base dei sottospazi Ker e Imf

vettori l.i che generano tutti gli elementi del sottospazio

Come trovare l'img associata ad f

1) troviamo la matrice associata

$f(x,y,z) = (x, y+z, x+y+z)$

$\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \rightarrow$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$f(1,0,0) = (1,0,1)$
$f(0,1,0) = (0,1,1)$
$f(0,0,1) = (0,1,1)$

mettiamo in colonna i vettori trovati

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Calcolo del rango

$\dim \operatorname{Im}(f) = rk(M)$

quindi calcoliamo il rk con G-J (oppure calcoliamo il det e se viene $\neq 0$ allo rk è massimo)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{M_3 = M_3 - R_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

$$\underset{M_3 = M_3 + M_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rank} M = 2$$

Quindi ora sappiamo che $\dim \operatorname{Img}(f) = 2$

ovvero la Base ha 2 vettori

3) trovare l'img

la base dell'img è formata dalle 2 colonne l.i

$$\operatorname{Img}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Come trovare il Ker

1) troviamo la matrice associata

$f(x,y,z) = (x, y+z, x+y+z)$

$\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \rightarrow$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$f(1,0,0) = (1,0,1)$

$f(0,1,0) = (0,1,1)$

$f(0,0,1) = (0,1,1)$

$$\rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim V - \dim \operatorname{Im} f$

$\dim \operatorname{Ker}(f) = \underbrace{3}_{\text{numero di elementi dentro un vettore di } \mathbb{R}^3} - \underbrace{2}_{\operatorname{rk} M} = 1$

$\operatorname{rk} M$ (calcolato in Come trovare Imf)

numero di vettori della base che formano ker

3) troviamo il Ker

- Moltiplico la matrice associata alla matrice delle incognite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

- Pongo il risultato = alla matrice nulla

$$\begin{pmatrix} x \\ y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 0 \\ y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

$z = z$ incognita libera

$$\rightsquigarrow \operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esempio speciale

Sistema calcolo Ker

$$\begin{cases} x = -t \\ 0y = 0 \\ 0y = 0 \end{cases}$$

a primo impatto prenderei solo $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ma la dimensione è 3 quindi faccio come sotto

Da calcoli precedenti sappiamo che dim Ker = 3

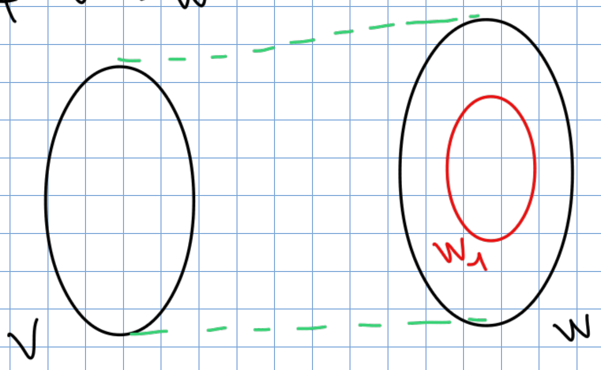
nella base finale dobbiamo aggiungere i vettori che faranno le incognite che non ci sono

$$\begin{cases} \boxed{x = -t} \\ \boxed{0y = 0} \\ \boxed{0z = 0} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Controimmagine

$f: V \to W$



Dato w_1 quale è la sua controimmagine in V (Si indica con $f^{-1}(w_1)$)

Esempio

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f^{-1}(2, -1, 0)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Matrici Diagonalizzabili

Data A una matrice quadrata si dice diagonalizzabile se simile alla matrice diagonale D. In altri termini

$$P^{-1} A P = D$$

D = matrice con autovalori nella diagonale

A = matrice associata

P = matrice con gli autovettori

P^{-1} = inversa di P

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 2 & 2 & h \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \quad h \in \mathbb{R}$$

matrice associata a: $f: V \to V$ $\dim V = 4$

$$H = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & h \\ 0 & 2 & 2-\lambda & h \\ 0 & 0 & 0 & h-\lambda \end{pmatrix}$$

- Calcolo gli autovalori

$$\operatorname{Det} H = (h-t)(1-t)\left[(1-t)(2-t)-2\right] = (h-t)(1-t)\left[t^2-3t\right] = 0$$

$$= (h-t)(1-t)+(t-3) = 0$$

$\lambda = 0 \quad \lambda = 1 \quad \lambda = 3 \quad \lambda = h$

Per $h \neq 0, 1, 3$

allora gli autovalori sono tutti distinti quindi l'endomorfismo è semplice e la matrice è diagonalizzabile

Per $h = 0$

$\lambda = 0$ $\quad m_a = 2$ coincide

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_g = 4 - \underbrace{2}_{rk\, H} = 2$

$\dim V_0 = 2$

$\lambda = 1$ $\quad m_a = 1$ $\quad m_g = 4 - 3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\dim V_1 = 1$

$\lambda = 3$ $\quad m_a = 1$ $\quad m_g = 4 - 3 = 1$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 + R_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\dim V_3 = 1$

$\dim V_0 + \dim V_1 + \dim V_3 = \dim V$

il numero di autovettori coincide con la dim V quindi la matrice è diagonalizzabile

Se ti chiede anche una base di autovettori devi fare la seguente per ogni autovalore

$\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ -2y+z=0 \\ -3t=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ z = 2y \\ t = 0 \end{cases} \rightarrow V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}y \\ y \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Fatte queste cose per tutti gli autovalori la base sarà:

$V_0 + V_1 + V_3$

Per $h = 1$

$\lambda = 0 \quad m_a = 1$

$\lambda = 1 \quad m_a = 2$ → non coincide

$\lambda = 3 \quad m_a = 1$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m_G = 4 - 3 = 1$$

$\dim V_0 = 1$

$\dim V_1 = 1$

$\dim V_3 = 1$

le dimensioni non coincidono quindi non è diagonalizzabile

Per $h = 3$

$\lambda = 0 \quad m_a = 1$

$\lambda = 1 \quad m_a = 1$

$\lambda = 3 \quad m_a = 2$ → non coincide

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m_G = 4 - 3 = 1$$

le dimensioni non coincidono quindi non è diagonalizzabile

Matrice cambio di base

$f: V \to W$

dim: $V \downarrow n$, $W \downarrow m$

$E \longrightarrow F$ → vecchie basi

$E_1 \longrightarrow F_1$ → nuove basi

$A = M^{E}_{F}(f)$ $\quad B = M^{E_1}_{F_1}(f)$

Passare da A e B è una cosa possibile e si fa così:

$Q^{-1} A P = B$

Q → matrice $m \times m$

P → matrice $n \times n$

P e Q sono dette matrici del cambio di base

V $\quad \dim V = n$

$E = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base di V

$E_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ base di V

chi è $P^{E E_1}$ ovvero la matrice di passaggio da E ad E_1

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{n1} v_n \\ w_2 &= a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{n2} v_n \\ w_n &= a_{1n} v_n + a_{2n} v_2 + \dots + a_{nn} v_n \end{aligned}\right\} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esempio:

$E = \{(-1,1)\ (2,0)\}$ $\quad E_1 = \{(1,1), (1,-1)\}$

$(1,1) = \alpha(-1,1) + \beta(2,0)$ $\quad \begin{cases} -\alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

$(1,-1) = \alpha(-1,1) + \beta(2,0)$ $\quad \begin{cases} -\alpha + 2\beta = +1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -1 \end{cases}$

$$P^{E E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Riprendendo $Q^{-1} A P = B$ possiamo dire che

$$Q \to Q \to Q^{F F_1} \qquad P \to P^{E E_1}$$

Esercizio:

$f: R^3 \to R^3 \qquad M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$E_1 = \{(1,-2,2),(0,1,1),(0,0,1)\}$

$F_1 = \{(1,1),(1,-1)\}$

Determina la matrice rispetto alle nuove basi

$Q^{\mathcal{E}_2 \to F_1}$ e $P^{\mathcal{E}_3 \to F_3} \to Q^{-1} A P = B = M^{E_1}_{F_1}(f)$

$P^{\mathcal{E}_3 \to F_3} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

usando il metodo spiegato prima

$Q^{\mathcal{E}_2 \to F_1} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M^{E_1}_{F_1}(f)$$

FORMULARIO

Img e Ker di f

1) Calcolo il rango della matrice ricordando che dim Img(f) = rk

2) Prendo rk ~~[illegible]~~ colonne l.i. dalla matrice per formare la base di Img f

3) Calcolo dim Ker f = dim V − rk

4) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ faccio un sistema del genere e devo trovare dim Ker incognite libere. Gli assegno valori a caso e trovo una base

Autovalori

Li trovo calcolando il det della seguente matrice:

$H = \begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 1 & 0-\lambda\end{bmatrix}$ ogni autovalore ha una molteplicità algebrica

Autovettori

Risolvi il sistema dato dalla matrice H con un autovalore al posto di λ $\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 1 & 0-\lambda\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

Autospazi

Prendo la matrice H con un autovalore al posto di λ e risolvo il seguenti tipo di sistema: $\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 1 & 0-\lambda\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, se lo faccio per ogni λ ottengo una base di autospazi $\Leftrightarrow$ dim V = mg

dim autospazio = dim V − rk (rk della matrice con uno specifico autovalore)

Semplicità

Calcolo gli autovalori, con le loro molteplicità, la dimensione degli autospazi e se la somma delle dimensioni degli autospazi = dim V allora f è semplice.

Se gli autovalori sono distinti e quindi $m_e = 1$ allora f è semplice

Diagonalizzazione

Verifico la semplicità, e poi calcolo P e D tale che $P^{-1}AP = D$

P è la matrice formata dalla base di autovettori in colonne

D è la matrice con gli autovalori nella diagonale

Intersezioni tra 2 spazi (U e V)

Ricavo le leggi dei 2 spazi e li metto a sistema, il numero di variabili libere è la dim $U \cap V$ per trovare una base assegno valori arbitrari alla legge intersezione

Somme tra 2 spazi (U e V)

$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$, la base la otteniamo aggregando le basi e eliminando i vettori linearmente dipendenti

Matrice associata

Data B una base formata così: $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ e f

1) Calcolo $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ (uso la legge o le condizioni imposte)
2) Calcolo le nuove legge così: $x(v_1) + y(v_2) + z(v_3)$
3) pongo la legge appena trovata a sistema con le componenti di $f(v_1), f(v_2)$ e $f(v_3)$ così (form 1, form 2, form 3)

$$\begin{cases} form1 = x \text{ di } f(v_1) \\ form2 = y \text{ di } f(v_1) \\ form3 = z \text{ di } f(v_1) \end{cases} \quad \text{per ogni } f(v_i)$$

4) Prendo i risultati $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ di ogni sistema e li metto in colonna per formare la matrice associata

Nel caso B fosse la base canonica metto in colonna $f(v_1), f(v_2)$ e $f(v_3)$

Controimmagine

Dato $f(x,y,z,t) = (x+y, z, y-t, x-t)$ trovare f^{-1} vuol dire risolvere $f(x,y,z,t) = (1,0,1,1)$ ovvero il seguente sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \\ y - t = 1 \\ x - t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ z = 0 \\ t = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi $f'(1,0,1,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$

Da base a ~~legge~~ eq cartesiane

Dato $U = \{(1,0,1,1), (1,1,0,1)\}$ costruisci la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

1) Calcola il det di queste 2 matrici
2) le pongo $= 0$
3) le eq che trovo sono le eq cartesiane

Se la matrice è quadrata è uno il det da calcolare, il numero di eq che mi aspetto è: $\dim V - \dim U$

$\downarrow$ $\mathbb{R}^4$ in questo caso

Vettori rispetto ad una base

Data la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ e il vettore $(1,2,3)$, scriverlo rispetto alla base B: $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (2,1,0)$ e $v_3 = (1,1,2)$. Scrivere la legge rispetto a $(1,2,3) = x(1,1,0) + y(2,1,0) + z(1,1,2)$ e quindi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -1 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + hy + z + t = 0 = x - y + z\}$

$V = \mathcal{L}((1,1,0,1),(1,0,2,1))$

Calcolo le eq di V

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} &\text{Det } 1 = -2y - (z - 2x) = -2y - z + 2x \\ &\text{Det } 2 = 2t - z - 2y = 2t - z - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + hy + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -2y - z + 2x = 0 \\ 2t - z - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - \cancel{z} + \cancel{z} + hy + t = 0 \\ x = y - z \\ \cancel{-2y} - z + \cancel{2y} - 2z = 0 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} t = -y - hy \\ x = y \\ z = 0 \\ -2y - 2hy - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -y - hy \\ x = y \\ z = 0 \\ -4y - 2hy = 0 \end{cases}$$

$-2y(-2 - h) = 0$

$h = -2$

$$\begin{cases} t = y \\ x = y \\ z = 0 \\ y = y \end{cases}$$

y variabile libera

$h \neq -2$

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\dim U \cap V = \begin{cases} 0 \text{ se } h \neq -2 \longrightarrow (0,0,0,0) \\ 1 \text{ se } h = -2 \longrightarrow (1,1,0,1) \end{cases}$$

$\dim U+V = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$

$h = -2$

$\dim U+V = 2+2-1 = 3$

$$\begin{cases} x-2y+z+t=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y-\cancel{z}-2y+\cancel{z}+t=0 \\ x=y-z \end{cases} \quad \begin{cases} -y+t=0 \\ x=y-z \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=y \\ y=y \\ x=y-z \\ z=z \end{cases} \longrightarrow (1,1,0,1),\ (-1,0,1,0)$$

$U+V = \{(-1,0,1,0), (1,1,0,1), (1,0,2,1)\}$

$h \neq -2$

$\dim U+V = 2+2-0 = 4$

$U+V = \mathbb{R}^4$

$v_1(1,0,0)$ $v_2(2,1,0)$ $v_3=(-1,1,1)$

$f(v_1)=(1,0,0)$

$f(v_2)=(5,2,0)$

$f(v_3)=(3-h, h+1, h)$

$(1,0,0)+(2,1,0)+(-h,h,h)=3-h, h+1, h$

$e_1(1,0,0)+e_2(2,1,0)+e_3(-1,1,1)=(1,0,0)$

$$\begin{cases} e_1+2e_2-e_3=1 \\ e_2+e_3=0 \\ e_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1=1 \\ e_2=0 \\ e_3=0 \end{cases}$$

$e_1(1,0,0)+e_2(2,1,0)+e_3(-1,1,1)=(5,2,0)$

$$\begin{cases} e_1+2e_2-e_3=5 \\ e_2+e_3=2 \\ e_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1=1 \\ e_2=2 \\ e_3=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$e_1(1,0,0)+e_2(2,1,0)+e_3(-1,1,1)=(3-h, h+1, h)$

$$\begin{cases} e_1+2e_2-\cancel{e_3}=3-\cancel{h} \\ e_2+e_3=h+1 \\ e_3=h \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1=1 \\ e_2=1 \\ e_3=h \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & h \end{matrix}$$

$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + hy + z + t = 0 = x - y + z\}$

$V = \mathcal{L}((1,1,0,1),(1,0,2,1))$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}}$$

1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{pmatrix} \rightsquigarrow 2y - (z - 2x) = -2y + 2x - z$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow 2t - z - 2y = 2t - z - 2y$$

$U \cap V$

$$\begin{cases} x + hy + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -2y + 2x - z = 0 \\ 2t - z - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - z + hy + z + t = 0 \\ x = y - z \\ -2y + 2y - 2z - z = 0 \\ 2t - z - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -y - hy \\ x = y - z \\ -3z = 0 \\ -2y - 2hy - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -y - hy \\ x = y \\ z = 0 \\ -4y - 2hy = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -2hy \\ x = y \\ z = 0 \\ y(-4 - 2h) = 0 \end{cases}$$

$h \neq -2$

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\dim U \cap V = 0$

$h = -2$

$$\begin{cases} t = -4y \\ x = y \\ z = 0 \\ y = y \end{cases}$$

$\dim U \cap V = 1$

ESAME

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 1 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk\,A \begin{cases} 3 & se\ h \neq 0 \\ 1 & se\ h = 0 \end{cases}$$

$$Im\,f \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & se\ h \neq 0 \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & se\ h = 0 \end{cases}$$

se $h = 0$

$\dim Ker = 4 - 1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x + t = 0 \\ z = z \\ t = t \\ y = y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = -t \\ z = z \\ t = t \\ y = y \end{cases}$$

$(-t, y, z, t)$

$$Ker\,f = \{(-1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$$

se $h \neq 0$ $\dim Ker = 4 - 3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = t \end{cases} \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = t \end{cases}$$

$(-1, 0, 0, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & h & 1 \\ 0 & h-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

$$Det = (1-\lambda)(h-\lambda)(h-\lambda)(-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = \lambda_4 = h$

$\boxed{\text{Per } h = 1}$

$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1 \qquad m_1 = 3$

$\lambda_2 = 0 \qquad m_0 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\dim Ker = 4 - 2 = 2 < 3 = m_1$

Dato che $\dim Ker < m_1$ allora f non è semplice

Per $h = 0$ $\qquad \lambda_1 = 1 \quad m_1 = 1 \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim Ker = 4 - 1 = 3$

Dato che $\dim Ker = m_0$ allora f è semplice

Per $h \neq 1$ e $h \neq 0$

$\lambda_1 = 1 \qquad m_1 = 1$

$\lambda_2 = 0 \qquad m_1 = 1$

$\lambda_3 = \lambda_4 = h \qquad m_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-h & 0 & h & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

$\dim Ker = 4 - 2 = 2$

Dato che $\dim Ker = m_2$ allora f è semplice l'unico valore che ha un autospazio di dimensione 3 ed è anche semplice è per $h = 0$

Di seguito il calcolo di P e D

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} t = -x \\ x = x \\ y = y \\ z = z \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = (1,0,0) \quad v_2 = (1,1,0) \quad v_3 = (1,1,1)$ → vettori della Base

$$\left.\begin{array}{l} f(v_1) = (2+h,\ h,\ h) \\ f(v_2) = (1,\ 1,\ 0) \\ f(v_3) = (2+2h,\ 2+h,\ 2) \end{array}\right\} \text{ immagini di } v_1, v_2, v_3$$

1

$a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0) + a_3(1,1,1) = (2+h, h, h)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2+h \\ a_2 + a_3 = h \\ a_3 = h \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = h \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

$a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0) + a_3(1,1,1) = (1,1,0)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_2 + a_3 = 1 \\ a_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0) + a_3(1,1,1) = (2+2h, 2+h, 2)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2+2h \\ a_2 + a_3 = 2+h \\ a_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = h \\ a_2 = h \\ a_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h \\ h \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ matrice associata

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 2 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ h & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 & h \\ h & 2 \end{pmatrix} = 4 - h^2 \rightarrow 4 - h^2 = 0 \rightarrow h^2 = 4$$

$h = \pm 2$

Per $h \neq \pm 2$ $\quad rk = 3 \quad Imf = R^3 \quad Ker = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Per $h = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad rk = 2 \quad Imf = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \\ x = -z \end{cases} \rightarrow (-z, -2z, z) \rightarrow (-1, -2, 1)$$

Per $h=-2$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$ $\quad rk=2 \quad$ $\text{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

2

$\ker f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x-2z=0 \\ y-2z=0 \\ -2x+2z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=2z \\ x=z \end{cases}$

$(z, 2z, z)$

$(1, 2, 1)$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ h & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \overset{h=2}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow (1-\lambda)[(2-\lambda)(2-\lambda)-4]$

$(1-\lambda)[4-2\lambda-2\lambda-\lambda^2-4] \rightarrow (1-\lambda)(-4\lambda-\lambda^2)$

$\begin{cases} 1-\lambda=0 \\ -4\lambda-\lambda^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda^2+4\lambda=0 \end{cases}$

$\Delta = 16-4(0)=16 \quad \lambda = \frac{-4 \pm 4}{2} < \begin{matrix} 0 \\ -4 \end{matrix}$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = -4$

f è semplice

$h=-2$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ h & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & 0 & +2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)[(2-\lambda)(2-\lambda)-4]$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = -4$

$h \neq \pm 2$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow (1-\lambda)[(2-\lambda)(2-\lambda)-1]$

$$\left\{\begin{array}{l} 1-\lambda=0 \\ 4-4\lambda-\lambda^2-1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda=1 \\ (2-\lambda)^2-1=0 \end{array}\right.$$

$$(2-\lambda)^2-1 \left\langle\begin{array}{l} -2+\lambda-1=0 \rightarrow \lambda=3 \\ 2-\lambda-1=0 \rightarrow \lambda=1 \end{array}\right.$$

$\lambda_1=1 \quad m_1=2 \qquad \lambda_2=3 \quad m_3=1$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad rk=2 \qquad \dim Ker=2$$

f non è semplice

3

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ h & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & h \\ 0 & 1-\lambda & h \\ h & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(2-\lambda)-h^2\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} (1-\lambda)=0 \\ (2-\lambda^2)^2-h^2=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} -\lambda=-1 \\ +h^2=(2-\lambda)^2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda=1 \\ h=2-\lambda \\ h=-2+\lambda \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda=1 \\ +\lambda=2-h \\ +\lambda=+h+2 \end{array}\right.$$

$\lambda_1=1$

$\lambda=2-h$

$\lambda=h+2$

i valori di h da verificare sono

$h=1$

$2-h=1 \rightarrow +h=+1$

$h+2=1 \rightarrow h=-1$

$2-h=h+2 \rightarrow h=0$

Per $h=1$.

$\lambda_1=1 \qquad \lambda_2=1 \qquad \lambda_3=3$

$m_1=2 \qquad m_3=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} rk=2 \\ \dim Ker=3-2=1 \end{array}$$

f non è semplice

Per $h = 0$ 5

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = 2$

$m_1 = 1$ $m_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 1$$

$\dim Ker = 3 - 1 = 2 = \rho_2$

f è semplice

Per $h = -1$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 3$ $\lambda_3 = 1$

$m_1 = 2$ $m_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad rk = 1$$

$\dim Ker = 3 - 1 = 2 = \rho_1$

f è semplice

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & h \\ 0 & 1-\lambda & h \\ h & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5

Per $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & h \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} 4+h=0 \\ h=0 \\ 4h+1=0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 2-h$

$$\begin{pmatrix} 2-(2-h) & 0 & h \\ 0 & 1-(2-h) & h \\ h & 0 & 2-(2-h) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +h & 0 & h \\ 0 & -1+h & h \\ h & 0 & +h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 4h+h=0 \\ -3+3h+h=0 \\ 4h+h=0 \end{cases}$$

Per $\lambda = h+2$

$$\begin{pmatrix} 2-(h+2) & 0 & h \\ 0 & 1-(h+2) & h \\ h & 0 & 2-(h+2) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -h & 0 & h \\ 0 & -h-1 & h \\ h & 0 & -h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -4h+h=0 \\ -3h-3+h=0 \\ 4h-h=0 \end{cases} \begin{cases} h=0 \\ -2h=3 \\ h=0 \end{cases}$$

$f(1,0,0) = (2,0,0)$ $\qquad$ $f(x,y,z) = (2x+y, hy, -hz)$

$f(0,1,0) = (1,h,0)$

$f(0,0,1) = (0,0,-h)$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

$\det M = 2 \begin{vmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{vmatrix} = -2h^2$

$-2h^2 = 0 \rightarrow h = 0$

Per $h \neq 0$ $\quad rk = 3 \quad \underbrace{\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3}_{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix} \right\}} \quad \mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Per $h = 0$ $\quad rk = 1 \quad \mathrm{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathrm{Ker} f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x \\ x = x \\ z = z \end{cases} \rightsquigarrow (x, -2x, z)$$

$\{(1,-2,0), (0,0,1)\}$

2)

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & h-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -h-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(h-\lambda)(-h-\lambda)$$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = h \quad \lambda_3 = -h$ $\qquad$ $h = 2$ $\qquad$ $-h = 2 \Rightarrow h = -2$ $\qquad$ $h = -h$, $2h = 0$, $h = 0$

$h = 2$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \qquad m_2 = 2$

$\lambda_3 = -2 \qquad m_{-2} = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad rk = 2$$

$g_2 = 3 - 2 = 1$

$g_2 < m_2$ quindi f non è semplice

$h = 0$

$\lambda_1 = 2 \qquad m_2 = 1$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad m_0 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 1$$

$g_0 = 3 - 1 = 2 \qquad g_0 = m_0$ quindi f è semplice

$h \neq 0$ e $h \neq 2$

gli autovalori sono distinti quindi f è semplice

$h = -2$

$\lambda_1 = \lambda_3 = 2 \qquad m_2 = 2$

$\lambda_2 = -2 \qquad m_{-2} = 1$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 1$

$g_2 = 3 - 1 = 2$

Perché $Ker = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $Imm = \mathbb{R}^3$

$m_2 = g_2$ quindi f è semplice

3) Però $h \neq 0$ f è un'isomorfismo, l'unico valore per cui f è un'isomorfismo ed ha un autospazio di dimensione 2 ed è semplice è $h = -2$. Calcolo base di autovettori con $h = -2$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda = 2$

$V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = x \\ z = z \end{cases} \rightsquigarrow (x, 0, z)$

$\downarrow$

$\{(1,0,0), (0,0,1)\}$

$V_{-2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} 4x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -4x \\ x = x \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow (x, -4x, 0)$

$\downarrow$

$\{(1, -4, 0)\}$

$B = \{V_1, V_{-2}\} = \{(1,0,0), (0,0,1), (1,-4,0)\}$

$f(x,y,z,t) = (x + hz, y + 2t, 2x + z, 2y + t)$

$f(1,0,0,0) = (1,0,2,0)$

$f(0,1,0,0) = (0,1,0,2)$

$f(0,0,1,0) = (h,0,1,0)$

$f(0,0,0,1) = (0,2,0,1)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ h & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ h & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 2(-h(1-4)) = -3 + 6h \Rightarrow h = \frac{1}{2}$$

$h \neq \frac{1}{2}$ $\quad rk = 4 \quad \text{Im} f = \mathbb{R}^4 \qquad \text{Ker} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\text{Im} f = \{(1\,0\,h\,0), (0\,1\,0\,2), (2\,0\,1\,0), (0\,2\,0\,1)\}$

$h = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad rk = 3 \quad \text{Im} f = \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \{(1,0,\tfrac{1}{2},0), (0,1,0,2), (0,2,0,1)\}$$

$$\ker f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 2t = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -2z \\ y = -2t \\ t = 0 \\ z = z \end{cases}$$

$(-2,0,1,0) \leftarrow (-2z,0,z,0)$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] + 2$$

$(-2)[(1-\lambda)^2 - 4] = (1-\lambda)^2((1-\lambda)^2 - 4) - 4((1-\lambda)^2 - 4) =$

$((1-\lambda)^2 - 4)((1-\lambda)^2 - 4) = ((1-\lambda)^2 - 4)^2 = ((1-\lambda-2)(1-\lambda+2))^2$

$(-\lambda-1)^2 \cdot (-\lambda+3)^2$

$$\left| \begin{array}{l} -\lambda - 1 = 0 \\ -\lambda - 1 = 0 \\ -\lambda + 3 = 0 \\ -\lambda + 3 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 3 \end{array}$$

$\lambda_1 = -1 \qquad m_{-1} = 2$

$\lambda_2 = 3 \qquad m_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad rk = 2 \quad g_{-1} = 4-2 = 2$$

$\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad rk = 2 \quad g_3 = 4-2 = 2$$

f è semplice cerchiamo P e D

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -z \\ y = -t \end{cases} \rightsquigarrow (-z, -t, z, t)$$

$$\{(-1,0,1,0), (0,-1,0,1)\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \to \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ -2y + 2t = 0 \end{cases} \to \begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases}$$

$$\to (x, y, x, y) \rightsquigarrow \{(1,0,1,0), (0,1,0,1)\}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TUTORATO

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad A = \{v_1, v_2, v_3\}$ $\quad v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,-1,-2)$, $v_3 = (0,1,0)$

$$f(x,y,z) = (x+z,\ -x+y+hz,\ hx+hz)$$

trovare $M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ e $M^{A,A}(f)$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,-1,h)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,0)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,h,h)$

$$M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & h \\ h & 0 & h \end{pmatrix} \to \text{matrice rispetto } \mathcal{E}$$

$$M^{A,A}(f) = \begin{pmatrix} 1+\frac{h}{2} & -1-\frac{h}{2} & 0 \\ -\frac{h}{2} & \frac{h}{2} & 0 \\ -h-1 & -h-1 & 1 \end{pmatrix} \to \text{matrice rispetto } A$$

$(1x+1y+0z,\ 1x-1y+1z,\ 0x-2y+0z$

$f(v_1) = x(1,1,0) + y(1,-1,-2) + z(0,1,0)$

$f(v_1) = (x+y,\ x-y+z,\ -2y)$

$f(v_1) = f(1,1,0) = (1,0,h)$ deriva dalle leggi cerchiate

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y+z=0 \\ -2y=h \end{cases} \to \begin{cases} x = 1+\frac{h}{2} \\ y = -\frac{h}{2} \\ z = -h-1 \end{cases}$$

$f(v_2) = (x+y,\ x-y+z,\ -2y)$

$f(v_2) = f(1,-1,-2) = (-1,\ -2h-2,\ -h)$ deriva dalle leggi cerchiate

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y+z=-2h-2 \\ -2y=-h \end{cases} \to \begin{cases} x = -1-\frac{h}{2} \\ y = \frac{h}{2} \\ z = -h-1 \end{cases}$$

$f(v_3) = (x+y,\ x-y+z,\ -2y)$

$f(v_3) = f(0,1,0) = f(e_2) = (0,1,0)$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=0 \\ -2y=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Studiare Imf e Ker

Sempre rispetto alla base canonica

$$M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & h \\ h & 0 & h \end{pmatrix}$$

$\det M = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ h & h \end{vmatrix} = h - h = 0$

$rk < 3 \ \forall h \in \mathbb{R}$ e quindi $\dim \operatorname{Im} f < 3$

$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ quindi $\dim \operatorname{Im} f = 2$ per ogni h

$\dim \operatorname{Ker} = 1$ // // //

$\operatorname{Im} f = \{(1,-1,h), (0,1,0)\}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & h \\ x & z \end{vmatrix} \rightarrow z - hx = 0$$

$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : hx - z = 0\}$

$\operatorname{Im} f = \{x, y, hx)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & h \\ h & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y + hz = 0 \\ hx + hz = 0 \end{cases} \begin{cases} z = -x \\ y = x + hx \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x + z = 0 \text{ e } y = (h+1)x\} \rightarrow (x, (h+1)x, -x)$

Studiare semplicità (Rispetto alle basi canoniche)

$$P(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ -1 & 1-t & h \\ h & 0 & h-t \end{vmatrix}$$

$$\det P(t) = (1-t)\begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ h & h-t \end{vmatrix} = (1-t)\left[(1-t)(h-t)-h\right] =$$

$$(1-t)[h-t-ht+t^2-h] = (1-t)\cdot t\cdot(t-h-1)$$

$$P(t)=0 \begin{cases} t=1 \\ t=0 \\ t=h+1 \end{cases}$$

$$M(f_\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & h \\ h & 0 & h-\lambda \end{pmatrix}$$

Se $h \neq 0 \wedge h \neq -1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 & m_e = 1 \\ \lambda_2 = 0 & m_e = 1 \\ \lambda = h+1 & m_e = 1 \end{cases} \rightarrow f$ è semplice

$h = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 = 1 & m_e = 2 \\ \lambda_2 = 0 & m_e = 1 \end{cases}$

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$rk = 2$ $\quad$ dim ker $= 1$

f non è semplice

$h = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 & m_e = 1 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0 & m_e = 2 \end{cases}$

$$M(f_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$rk = 2$ $\quad$ dim ker $= 1$

f non è semplice

Se ci chiede se la matrice è diagonalizzabile calcoliamo gli autospazi facendo una base e creiamo le matrice

P e D

P $\rightarrow$ base di autovettori in colonne

D $\rightarrow$ autovalori nella diagonale

Studiare gli autospazi per ogni valore di h

V_1 per $h=0$ $\quad \lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} z=0 \\ -x=0 \\ -z=0 \end{cases} \to (0,y,0) \to (0,1,0)$$

V_0 per $h=-1$ $\quad \lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x+z=0 \\ -x+y-z=0 \\ -x-z=0 \end{cases} \to \begin{cases} z=-x \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases} \to (x,0,-x) \to (1,0,-1)$$

$h \neq 0 \wedge h \neq -1$

$$M = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & h \\ h & 0 & h-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & h \\ h & 0 & h-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} z=0 \\ -x+hz=0 \\ hx+(h-1)z=0 \end{cases} \to V_1 = (0,y,0)$$

$$\lambda = 0 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & h \\ h & 0 & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x+z=0 \\ -x+y+hz=0 \\ hx+hz=0 \end{cases} \to V_0 = (x,(h+1)x,-x)$$

$$\lambda = h+1 \to \begin{pmatrix} \cancel{1}-h-\cancel{1} & 0 & 1 \\ -1 & \cancel{1}-h-\cancel{1} & h \\ h & 0 & \cancel{h}-\cancel{h}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -hx+z=0 \\ -x-hy+hz=0 \\ hx-z=0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} z=hx \\ -x-hy+h^2x=0 \\ 0=0 \end{cases} \begin{cases} z=hx \\ y=\frac{(h^2-1)x}{h} \\ 0=0 \end{cases} \to V_{h+1} = \left(x, \frac{h^2-1}{h}x, hx\right)$$